Cours du 01.03.2021

lundi, 1 mars 2021 18:25

RAPPEL : TOUT le support du cours se trouve sur le site suivant

[https://eswys.ch/hepia/](https://eswys.ch/hepia/)

Types de preuves :

- Si et seulement si (preuve a "double sens")
- Preuve par l'absurde (Prouver X => supposons PAS X, et on tombe sur une contradiction)
- Preuves par "accordéon" Prouve A=B (A = ... = ... = ... = B)

Exercice : Prouvez que (en 2D)

A : Le vecteur $\vec{v}$ est le vecteur nul $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

SI ET SEULEMENT SI $\Longleftrightarrow$

B : La norme du vecteur est 0.

$A \Rightarrow B$ : ✓ La norme du vecteur nul et égal à $\|\vec{0}\| = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{0} = 0$ ✓

$A \Leftarrow B$ : ✓ Un vecteur ayant une norme nulle, aura 0 dans toutes ses composantes car :

$$0^2 = \|\vec{X}\|^2 = \underbrace{x_1^2 + x_2^2}$$

$$x_1^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad (\sqrt{0} = 0)$$

$$x_2^2 \geq 0 \quad \ldots\ldots$$

Donc si $x_1 \neq 0 \Rightarrow x_1^2 > 0$ et $\|\vec{x}\| > 0$

$\quad\ \ldots\ x_2 \ldots\ldots\ x_2^2 \ldots\ldots\ \|\vec{x}\| > 0$

Si UNE seule des composantes ($x_1$ ou $x_2$) du vecteur n'est PAS 0, alors sa norme n'est pas 0 non-plus. Donc, TOUTES ses composantes sont égales à 0

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{vecteur nul}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow A \end{array}\right\} \text{CQFD!}$$

Définissons des "opérations" sur les vecteurs :

Opérateur "Addition" (+) : $\mathbb{R}^{2\,N} \times \mathbb{R}^{2\,N} \longmapsto \mathbb{R}^{2\,N}$

$$\vec{x} + \vec{y} \longmapsto \vec{z} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_N + y_N \end{pmatrix}$$

Prouvez que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ :

(+) est commutatif scalaires

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \stackrel{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{y} + \vec{x}$$

CQFD!

$$\vec{x} \text{ "+" } \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 + y_1 \end{pmatrix}$$ est-ce commutatif !

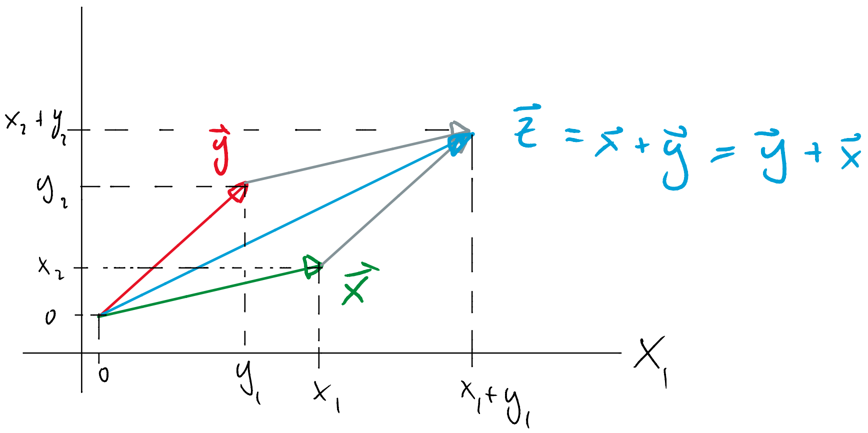
Contre exemple suffit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{"+"} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \neq$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{"+"} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Interprétation géométrique de l'addition de deux vecteurs

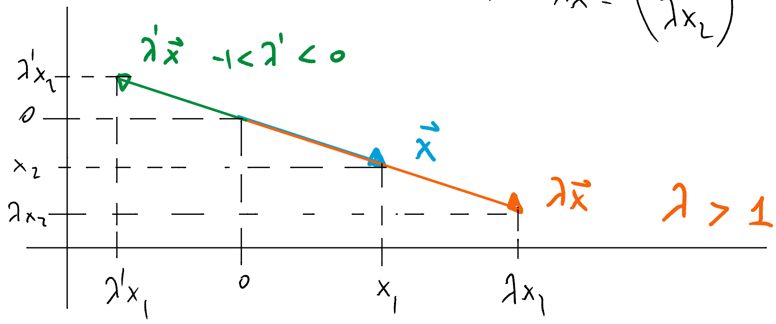
$x_2$




Autre opérateur : $a - b = a + (-b) = a + (-1)\cdot b$

Multiplication par un scalaire :

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$$
$$\lambda \cdot \vec{x} \longmapsto \lambda \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$




Moralité : la multiplication par un scalaire impacte la LONGUEUR (norme) ET le SENS, mais jamais la DIRECTION du vecteur.

Youpee : la multiplication par un scalaire est

Associative $(\lambda \cdot \mu)\vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x})$

Commutative $\lambda \cdot \mu \cdot \vec{x} = \mu \cdot \lambda \cdot \vec{x}$

Distributive par rapport à l'addition de vecteurs $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$

$(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$

Que se passe-t-il avec la NORME ?

$$\|\lambda\vec{x}\| = \underbrace{|\lambda|}_{\text{val. absolue}} \underbrace{\|\vec{x}\|}_{\text{norme}} \qquad \left( \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)$$

**Preuve :** (2D)

val. absolue   norme

**Preuve :** (2D)

$$\|\lambda\vec{x}\|^2 = (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 = \lambda^2 (x_1^2 + x_2^2) = \lambda^2 \|\vec{x}\|^2$$

$$\rightarrow (\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2)$$

$$\|\lambda\vec{x}\| = \sqrt{\lambda^2 (x_1^2 + x_2^2)} = \sqrt{\lambda^2}\,\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$$

CQFD

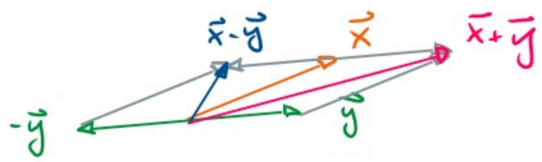
$$\sqrt{a^2 \cdot b^2} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

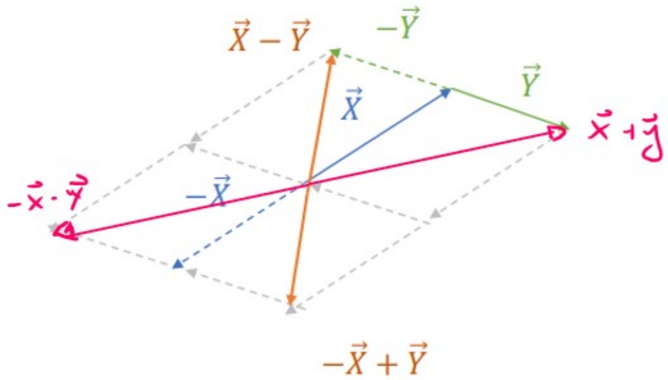
$$(a^2 \cdot b^2)^{1/2} = (a^2)^{1/2} \cdot (b^2)^{1/2} = |a| \cdot |b| = |a \cdot b|$$

⚠

Qu'est-ce que la SOUSTRACTION de 2 vecteurs :

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-1) \cdot \vec{y}$$



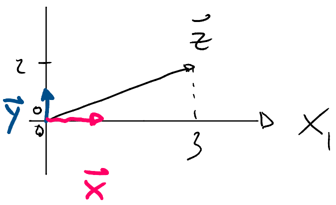




$$-1(\vec{x}+\vec{y}) = -1\vec{x} - 1\vec{y}$$

ATTENTION : la soustraction n'est PAS commutative !!!!

$x_2$

$\vec{z} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$




$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{z} = 3\cdot\vec{x} + 2\vec{y} = 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

**COMBINAISON LINEAIRE :**

La combinaison linéaire de deux vecteurs et deux scalaires se définit comme $\vec{x},\vec{y},\vec{u}$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\vec{z} = \lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} + \lambda_3\vec{u}$$

En N dimensions, on aura une combinaison linéaire de M vecteurs définie ainsi :

$$\vec{z} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \dots + \lambda_n\cdot\vec{x}_n$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$
$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in \mathbb{R}^N$

(c'est un peu comme une somme pondérée !)

Définition : soient deux vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^N$
On dit que x et y sont
- Colinéaires
- Linéairement dépendants
- Liés

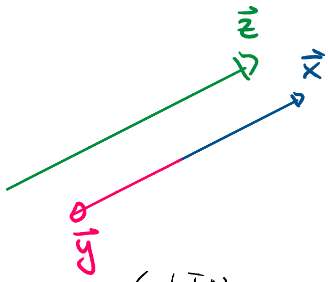
S'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{x} + \lambda\vec{y} = \vec{0} \quad (\text{ou } \vec{x} = -\lambda\cdot\vec{y})$$

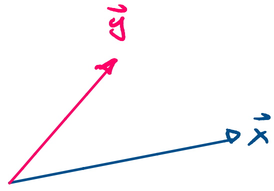
Interprétation : deux vecteurs sont COLINEAIRES s'ils ont la même DIRECTION !!

S'ils ne sont PAS colinéaires, on dit alors qu'ils sont
- NON-colinéaires (vs colinéaires)

• Linéairement Indépendants (vs lin. Dépendants)
• LIBRES (vs lié).




COLIN.




NON- COLIN.

$\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont

TOUS coliniaires